AGH
Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie

Techniki obliczeniowe 2018/2019

Wykład nr 9

Dr inż. Przemysław Korohoda
E-mail: korohoda@agh.edu.pl
Tel.wewn.AGH: (012-617)-27-52
Pawilon C3 - p.506

Strona WWW:
galaxy.agh.edu.pl/~korohoda/rok_2018_2019_zima/TO_EiT_2

Plan wykładu „Wybrane równania różniczkowe i układy równań różniczkowych"

1. Skalarne równanie różniczkowe (liniowe) jednorodne
2. Skalarne równanie różniczkowe (liniowe) niejednorodne
3. Układ równań różniczkowych liniowych (nieliniowych) (podejście wektorowe – zapis macierzowy)

Pochodna –> równanie różniczkowe

$$x = x(t)$$

(1) (2) (3)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}x = x'(t) = x' = \dot{x}$$

Oznaczenia według:
(1) - Leibniza (Leibnitz; 1646 Lipsk - 1716 Hanower)
(2) - Lagrange'a (1736 Turyn - 1813 Paryż)
(3) - Newtona (1642/1643 - 1726/1727)

W.Krysicki, L.Włodarski: Analiza matematyczna w zadaniach, T.1. PWN, Warszawa 2005.

Równanie różniczkowe, zwyczajne, liniowe, jednorodne

Problem:

$$\frac{d}{dt}x(t) = p(t)\cdot x(t)$$

Warunek początkowy:

$$x(t_0) = x_0$$

Rozwiązanie:

$$\boxed{x(t) = x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau}}$$

Dowód:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}x_0\cdot e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau} = x_0\cdot e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau}\cdot\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau =$$

$$= x_0\cdot e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau}\cdot p(t) = p(t)\cdot x(t)$$

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau = P(t) - P(t_0) \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau = p(t)}$$

Sprawdzenie warunku początkowego – samodzielnie.

Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne

Problem:

$$\frac{d}{dt}x(t) = p(t)\cdot x(t) + g(t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

Rozwiązanie:

$$\boxed{x(t) = \left[\int_{t_0}^{t} g(\tau)\cdot e^{-\int_{t_0}^{\tau} p(\eta)\,d\eta}\,d\tau + x_0\right]\cdot e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau}}$$

Ten sam wymiar dla zmiennych: $[t] = [\tau] = [\eta]$

Dowód :

$$\frac{d}{dt}x(t) = g(t)\cdot e^{-\int_{t_0}^{t} p(\eta)\,d\eta}\cdot e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau} + \left[\int_{t_0}^{t} q(\tau)\cdot e^{-\int_{t_0}^{\tau} p(\eta)\,d\eta}\,d\tau + x_0\right]\cdot e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau}\cdot p(t) =$$

$$= g(t) + x(t)\cdot p(t)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau = p(t)}$$

Sprawdzenie warunku początkowego – samodzielnie.

Równanie różniczkowe jednorodne liniowe (o stałym współczynniku)

Formy zapisu:

$$\frac{d}{dt}x(t) = a\cdot x(t)$$

$$x'(t) = a\cdot x(t)$$

$$x' = a\cdot x$$

Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego liniowego (RORJ):

$$x(t) = c\cdot e^{a\cdot t}$$ *c - stała*

Sprawdzenie (dowód):

$$\left(c\cdot e^{a\cdot t}\right)' = a\cdot c\cdot e^{a\cdot t} = a\cdot x(t)$$

Równanie różniczkowe jednorodne liniowe (o stałym współczynniku)

Rozwiązanie szczególne równania jednorodnego liniowego (RSRJ):

warunek początkowy: $x(t_0) = x_0$

po jego uwzględnieniu otrzymujemy RSRJ:

$$x_0 = c_0 \cdot e^{a \cdot t_0} \quad \rightarrow \quad c_0 = x_0 \cdot e^{-a \cdot t_0}$$

$$x(t)\Big|_{x(t_0)=x_0} = x(t, x_0) = x_s(t) = x_0 \cdot e^{a \cdot (t - t_0)}$$

Ponieważ w dalszej części rozważać będziemy wyłącznie rozwiązania szczególne, więc zrezygnujemy z podkreślania tego faktu, czyli przyjmiemy, że:

$$x(t) = x_s(t)$$

Równanie różniczkowe niejednorodne liniowe (RN)

Jest to przypadek specjalny – ponieważ a jest stałe, a mogłoby być funkcją t, np. $p(t)$.

$$\frac{d}{dt} x(t) = a \cdot x(t) + g(t) \qquad x_0 = x(t_0)$$

$$x = x(t); \quad g = g(t); \quad a = const.$$

$$x' = a \cdot x + g$$

Równanie różniczkowe niejednorodne liniowe (RN)

Rozwiązanie szczególne RN (RSRN): $\boxed{x_0 = x(t_0)}$ $\boxed{\frac{d}{dt} x(t) = a \cdot x(t) + g(t)}$

$$x(t) = \left. \left[\int_{t_0}^{t} g(\tau) \cdot e^{-\int_{t_0}^{\tau} p(\eta)\, d\eta} \, d\tau + x_0 \right] \cdot e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau} \right|_{p(t)=a} = \left[\int_{t_0}^{t} g(\tau) \cdot e^{-a \cdot (\tau - t_0)} \, d\tau + x_0 \right] \cdot e^{a \cdot (t - t_0)} =$$

$$= x_0 \cdot e^{a \cdot (t - t_0)} + e^{a \cdot (t - t_0)} \cdot \int_{t_0}^{t} g(\tau) \cdot e^{-a \cdot (\tau - t_0)} \, d\tau$$

$$x(t) = x_0 \cdot e^{a \cdot (t - t_0)} + e^{a \cdot t} \cdot e^{-a \cdot t_0} \cdot e^{a \cdot t_0} \cdot \int_{t_0}^{t} g(\tau) \cdot e^{-a \cdot \tau} \, d\tau = \qquad \boxed{q'(t) = g(t) \cdot e^{-a \cdot t}}$$

$$= x_0 \cdot e^{a \cdot (t - t_0)} + e^{a \cdot t} \cdot \left[q(t) - q(t_0) \right]$$

$$\boxed{x(t) = \left[x_0 \cdot e^{-a \cdot t_0} - q(t_0) \right] \cdot e^{a \cdot t} + q(t) \cdot e^{a \cdot t} = c_0 \cdot e^{a \cdot t} + \left[q(t) - q(t_0) \right] \cdot e^{a \cdot t}}$$

Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne (RN)

Rozwiązanie szczególne RN (RSRN): $\boxed{\frac{d}{dt} x(t) = a \cdot x(t) + g(t)}$

$$x(t) = x_0 \cdot e^{a \cdot (t - t_0)} + e^{a \cdot t} \cdot \left[q(t) - q(t_0) \right] \qquad \boxed{x_0 = x(t_0)} \quad \boxed{q'(t) = g(t) \cdot e^{-a \cdot t}}$$

czyli:

$$x(t) = e^{a \cdot t} \cdot \left(e^{-a \cdot t_0} \cdot x_0 - q(t_0) + q(t) \right)$$

w szczególności:

$$dla \quad t_0 = 0:$$

$$x(t) = e^{a \cdot t} \cdot \left(x_0 - q(0) + q(t) \right)$$

Jak wyznaczyć $q(t)$? Np. … zgadując …

Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne (RN)

Przykład 1:

$$x'(t) = a \cdot x(t) + b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2$$

więc: $g(t) = b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2$

$$q'(t) = e^{-a \cdot t} \cdot \left(b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 \right)$$

Zgadujemy, że:

$$q(t) = e^{-a \cdot t} \cdot \left(d_0 + d_1 \cdot t + d_2 \cdot t^2 \right)$$

zatem:

$$q'(t) = -a \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \left(d_0 + d_1 \cdot t + d_2 \cdot t^2 \right) + e^{-a \cdot t} \cdot \left(d_1 + 2 \cdot d_2 \cdot t \right) =$$

$$= e^{-a \cdot t} \cdot \left[\left(-a \cdot d_0 + d_1 \right) + \left(-a \cdot d_1 + 2 \cdot d_2 \right) \cdot t + \left(-a \cdot d_2 \right) \cdot t^2 \right]$$

$\boxed{x'(t) = a \cdot x(t) + b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2}$

Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne (RN)

Przykład 1 (cd.):

z porównania

$$q'(t) = e^{-a \cdot t} \cdot \left(b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 \right) \qquad \boxed{q'(t) = g(t) \cdot e^{-a \cdot t}}$$

$$q'(t) = e^{-a \cdot t} \cdot \left[\left(-a \cdot d_0 + d_1 \right) + \left(-a \cdot d_1 + d_2 \right) \cdot t + \left(-a \cdot d_2 \right) \cdot t^2 \right]$$

wynika, że:

$$\begin{cases} -a \cdot d_0 + d_1 = b_0 \\ -a \cdot d_1 + 2 \cdot d_2 = b_1 \\ -a \cdot d_2 = b_2 \end{cases}$$

co można zapisać macierzowo:

$$\begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ 0 & -a & 2 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{B} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{b}$ **zatem:** $\mathbf{d} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{b}$

$$\boxed{x'(t) = a \cdot x(t) + b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2}$$

AGH

Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne (RN)

Przykład 1 (zakończenie):

...lub tradycyjnie (metodą kolejnego podstawiania – macierz A jest przecież trójkątna):

$$d_2 = -\frac{b_2}{a}$$
$$\downarrow$$
$$d_1 = -\frac{b_1}{a} + 2 \cdot \frac{d_2}{a}$$
$$\downarrow$$
$$d_0 = -\frac{b_0}{a} + \frac{d_1}{a}$$

Po przyjęciu warunku początkowego dla t_0=0 otrzymujemy rozwiązanie:

$$x_0 = x(0) \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{a \cdot t} \cdot \left[x_0 - d_0 + e^{-a \cdot t} \cdot \left(d_0 + d_1 \cdot t + d_2 \cdot t^2 \right) \right]$$

AGH

Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne (RN)

Przykład 2:

$$x'(t) = a \cdot x(t) + \underbrace{\left[b_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + b_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \right]}_{g(t)}$$

czyli:

$$q'(t) = e^{-a \cdot t} \cdot \left[b_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + b_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \right]$$

$$\boxed{q'(t) = g(t) \cdot e^{-a \cdot t}}$$

Zgadujemy, że:

$$q(t) = e^{-a \cdot t} \cdot \left[d_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + d_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \right]$$

zatem po policzeniu pochodnej otrzymujemy:

$$\begin{aligned} q'(t) \; = \; & -a \cdot e^{-a \cdot t} \cdot \left[d_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + d_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \right] \; + \\ & + \; e^{-a \cdot t} \cdot \left[(-d_0 \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + (d_1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{x'(t) = a \cdot x(t) + \left[b_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + b_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \right]}$$

AGH

Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne (RN)

Przykład 2 (cd.):

$$\boxed{q'(t) = g(t) \cdot e^{-a \cdot t}}$$

Porównując dwa sposoby wyrażenia pochodnej *q′(t)*:

$$q'(t) = e^{-a \cdot t} \cdot \left[b_0 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + b_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \right]$$

$$q'(t) = e^{-a \cdot t} \cdot \left[(-a \cdot d_0 + 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot d_1) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) + (-a \cdot d_1 - 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot d_0) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t) \right]$$

otrzymujemy:

$$\begin{cases} -a \cdot d_0 & + \quad 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot d_1 & = \quad b_0 \\ -2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot d_0 & - \quad a \cdot d_1 & = \quad b_1 \end{cases}$$

w zapisie macierzowym:

$$\begin{bmatrix} -a & 2 \cdot \pi \cdot f_0 \\ -2 \cdot \pi \cdot f_0 & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

czyli: $\mathbf{B} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{b}$ **...i wyliczamy wektor d:** $\mathbf{d} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{b}$

AGH

Równanie różniczkowe liniowe niejednorodne (RN)

Przykład 2 (dokończenie - prawie):

$$\begin{bmatrix} -a & 2 \cdot \pi \cdot f_0 \\ -2 \cdot \pi \cdot f_0 & -a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

Rozwiązanie równania na wektor d można łatwo zrealizować w Matlabie lub, w tym akurat przypadku, manualnie:

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{\mathbf{B}_D^T}{\det(\mathbf{B})} = \frac{1}{a^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot f_0^2} \cdot \begin{bmatrix} -a & -2 \cdot \pi \cdot f_0 \\ 2 \cdot \pi \cdot f_0 & -a \end{bmatrix}$$

AGH

Układ równań różniczkowych liniowych niejednorodnych (zapis macierzowy)

$$\begin{cases} x_1'(t) & = & a_{11} \cdot x_1(t) + a_{12} \cdot x_2(t) + \ldots + a_{1N} \cdot x_N(t) & + & g_1(t) \\ x_2'(t) & = & a_{21} \cdot x_1(t) + a_{22} \cdot x_2(t) + \ldots + a_{2N} \cdot x_N(t) & + & g_2(t) \\ . & & . & & \\ . & & . & & \\ . & & . & & \\ x_N'(t) & = & a_{N1} \cdot x_1(t) + a_{N2} \cdot x_2(t) + \ldots + a_{NN} \cdot x_N(t) & + & g_N(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_{N.}'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{N \times N} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ g_N(t) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)}$$

$$\mathbf{q}'(t) = e^{-\mathbf{A} \cdot t} \cdot \mathbf{g}(t)$$

$$\mathbf{q}'(t) = \begin{bmatrix} q_1'(t) \\ q_2'(t) \\ . \\ . \\ . \\ q_N'(t) \end{bmatrix}$$

AGH

Układ równań różniczkowych liniowych niejednorodnych (zapis macierzowy)

$$\boxed{\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)}$$

RSRN dla warunku początkowego: $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A} \cdot t} \cdot \left(e^{-\mathbf{A} \cdot t_0} \cdot \mathbf{x}_0 - \mathbf{q}(t_0) + \mathbf{q}(t) \right)$$

gdzie: $\boxed{\mathbf{q}(t) \;\; : \;\; \mathbf{q}'(t) = e^{-\mathbf{A} \cdot t} \cdot \mathbf{g}(t)}$

$$\boxed{\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)}$$

Układ równań różniczkowych liniowych niejednorodnych (zapis macierzowy)

Przykład 3:

$$\begin{cases} x_1'(t) = k_1 \cdot x_1(t) + k_2 \cdot x_2(t) + p \\ x_2'(t) = k_3 \cdot x_1(t) + k_4 \cdot x_2(t) \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}\cdot t}\cdot\left[\mathbf{x}_0 - \mathbf{q}(0) + \mathbf{q}(t)\right]$$

$$\mathbf{q}'(t) = e^{-\mathbf{A}\cdot t}\cdot\begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zgadujemy:

$$\mathbf{q}(t) = e^{-\mathbf{A}\cdot t}\cdot\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

czyli: $\mathbf{q}'(t) = -\mathbf{A}\cdot e^{-\mathbf{A}\cdot t}\cdot\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$

ciekawostka: $\boxed{\mathbf{A}\cdot e^{\mathbf{A}\cdot t} = e^{\mathbf{A}\cdot t}\cdot\mathbf{A}}$

więc: $\mathbf{q}'(t) = e^{-\mathbf{A}\cdot t}\cdot(-\mathbf{A})\cdot\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$

czyli ostatecznie:

$$e^{-\mathbf{A}\cdot t}\cdot(-\mathbf{A})\cdot\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} = e^{-\mathbf{A}\cdot t}\cdot\begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix} = -\mathbf{A}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}(t) = -e^{-\mathbf{A}\cdot t}\cdot\mathbf{A}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} p \\ 0 \end{bmatrix}$$

...teraz wystarczy podstawić.

$$\boxed{\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(t)}$$

Układ równań różniczkowych liniowych (nie)jednorodnych (zapis macierzowy)

Przykład 4:
drgania harmoniczne (ten układ jest jednorodny, ale możemy to łatwo zmienić)

$$F = m\cdot a; \quad a = v'; \quad v = x'; \quad x(0) = x_0; \quad v(0) = v_0;$$

$$F(t) = -k\cdot x(t);$$

$$a(t) = \frac{F(t)}{m}$$

$$x''(t) = \frac{F(t)}{m}$$

$$\begin{cases} v'(t) = -\dfrac{k}{m}\cdot x(t) \\ x'(t) = v(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} v' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k\cdot m^{-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -k\cdot m^{-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v(t) \\ x(t) \end{bmatrix} = e^{\mathbf{A}\cdot t}\cdot\begin{bmatrix} v_0 \\ x_0 \end{bmatrix}$$

Układ równań różniczkowych liniowych (nie)jednorodnych (zapis macierzowy)

Przykład 4a:
drgania harmoniczne (Matlab)

$$\boxed{\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(t)}$$

```
k=0.01;
m=10;
dt=1;
tmax=1000;
   t=0:dt:tmax;
  xo=[-10;5];
         Options=odeset;
  [t1,x1]=ode45(@ruch_harm_ode,t,xo,  Options,  k,m);
```

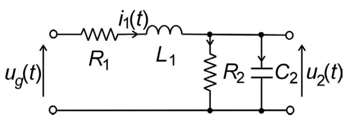
```
function dx=ruch_harm_ode(t,x,  k,m);
           dvt=-k*x(2)/m;
           dxt=x(1);
    dx=[dvt;dxt];
```

$$\boxed{\begin{cases} v'(t) = -\dfrac{k}{m}\cdot x(t) \\ x'(t) = v(t) \end{cases}}$$

$$\boxed{\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)}$$

Opis i rozwiązanie w dziedzinie czasu dla czwórnika RLC

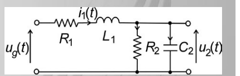
Czwórnik RLC
(wariant u/u)



1 oczko
1 węzeł
4 zależności u(i)
1 połączenie równoległe
1 połączenie szeregowe
2 warunki początkowe

$$\begin{cases} u_g(t) = u_1(t) + u_2(t) \\ i_{R_1}(t) + i_{L_1}(t) = i_{R_2}(t) + i_{C_2}(t) \\ u_1(t) = R_1\cdot i_{R_1}(t) \\ u_2(t) = R_2\cdot i_{R_2}(t) \\ \dfrac{d}{dt}i_{L_1}(t) = \dfrac{1}{L_1}\cdot u_1(t) \qquad \boxed{i_{L_1}(0) = i_{L_1 0}} \\ \dfrac{d}{dt}u_2(t) = \dfrac{1}{C_2}\cdot i_{C_2}(t) \qquad \boxed{u_2(0) = u_{20}} \end{cases}$$

Opis i rozwiązanie w dziedzinie czasu dla czwórnika RLC



Układ równań różniczkowych (liniowych, niejednorodnych, rzędu 1):

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}i_{L_1}(t) = \dfrac{u_g(t) - u_2(t)}{L_1} \\ \dfrac{d}{dt}u_2(t) = \dfrac{i_{L_1}(t)}{C_2} + \dfrac{u_g(t) - u_2(t)}{C_2\cdot R_1} - \dfrac{u_2(t)}{C_2\cdot R_2} \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)}$$

Ogólnie (układ może być nieliniowy):

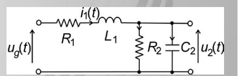
$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t=0) = \begin{bmatrix} i_{L_1}(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}' = \dot{\mathbf{x}}$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{dt}x_1(t) \\ \dfrac{d}{dt}x_2(t) \end{bmatrix}$$

Opis i rozwiązanie w dziedzinie czasu dla czwórnika RLC



Inny wariant zapisu ogólnego:

$$\boxed{\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1(t), x_2(t)) \\ f_2(t, x_1(t), x_2(t)) \end{bmatrix}$$

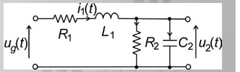
$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{L_1}(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

W tym przypadku jednak funkcje są liniowe:

$$f_1(t, x_1, x_2) = \frac{u_g(t)}{L_1} - \frac{1}{L_1}\cdot u_2(t)$$

$$f_2(t, x_1, x_2) = \frac{1}{C_2}\cdot i_{L_1} + \left(\frac{-1}{C_2\cdot R_1} + \frac{-1}{C_2\cdot R_2}\right)\cdot u_2(t) + \frac{u_g(t)}{C_2\cdot R_1}$$

Opis i rozwiązanie w dziedzinie czasu dla czwórnika RLC



$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{g}$$

Dla liniowych funkcji:

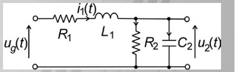
$$f_1(t, x_1(t), x_2(t)) = a_{1,1} \cdot x_1(t) + a_{1,2} \cdot x_2(t) + g_1(t)$$
$$f_2(t, x_1(t), x_2(t)) = a_{2,1} \cdot x_1(t) + a_{2,2} \cdot x_2(t) + g_2(t)$$

… zatem dla rozważanego czwórnika:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{L_1} \\ \dfrac{1}{C_2} & -\dfrac{R_1 + R_2}{C_2 \cdot R_1 \cdot R_2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{u_g(t)}{L_1} \\ \dfrac{u_g(t)}{C_2 \cdot R_1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t = 0) = \begin{bmatrix} i_{L_1}(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L_1} \\ \dfrac{1}{R_1 \cdot C_2} \end{bmatrix} \cdot u_g(t) = \mathbf{c}_g \cdot u_g(t)$$

Opis i rozwiązanie w dziedzinie czasu dla czwórnika RLC



Korzystamy z ogólnej proponowanej postaci RSRN przy wymuszeniu:

$$u_g(t) = d \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0) \cdot \mathbf{1}(t)$$

Ponieważ rozpoczynamy badanie odpowiedzi od chwili *t*=0, więc wymuszenie kosinusoidalne jest postaci:

$$u_g(t) = d \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0) \quad dla \quad t > 0$$

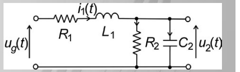
… zatem „zgadujemy” ogólnie, jak dla przypadku skalarnego :

$$\mathbf{q}(t) = e^{-\mathbf{A} \cdot t} \cdot \left[\mathbf{a} \cdot d \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0) + \mathbf{b} \cdot d \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0)\right]$$
$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^N$$

wyliczamy odpowiednią pochodną
…i porównujemy ze wzorcem:

$$\boxed{\mathbf{q}'(t) = e^{-\mathbf{A} \cdot t} \cdot \mathbf{g}(t)}$$

Opis i rozwiązanie w dziedzinie czasu dla czwórnika RLC



Przyrównanie obu wersji prowadzi do układu równań (*N* - dowolne):

$$\begin{cases} -\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} + (2 \cdot \pi \cdot f_0) \cdot \mathbf{E}_N \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c}_g \\ -(2 \cdot \pi \cdot f_0) \cdot \mathbf{E}_N \cdot \mathbf{a} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}_N \end{cases}$$

$$\mathbf{E}_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

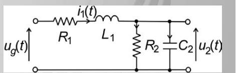
… który można rozwiązać np. tak:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}_{2 \cdot N} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_{N \times N} & (2 \cdot \pi \cdot f_0) \cdot \mathbf{E}_N \\ -(2 \cdot \pi \cdot f_0) \cdot \mathbf{E}_N & -\mathbf{A}_{N \times N} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{c}_g \\ \mathbf{0}_N \end{bmatrix}$$

$$tu: \quad \mathbf{c}_g = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L_1} \\ \dfrac{1}{R_1 \cdot C_2} \end{bmatrix}$$

Tu: N=2

Opis i rozwiązanie w dziedzinie czasu dla czwórnika RLC



Zatem wyliczamy (przewidując postać RSRN):

$$\mathbf{q}(t) = e^{-\mathbf{A} \cdot t} \cdot \left[\mathbf{a} \cdot d \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0) + \mathbf{b} \cdot d \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0)\right]$$
$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{a} \cdot d \cdot \cos(\varphi_0) + \mathbf{b} \cdot d \cdot \sin(\varphi_0)$$
$$\mathbf{c} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{q}(0)$$

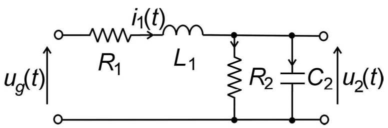
… otrzymując szukane przebiegi w dziedzinie czasu:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A} \cdot t} \cdot \left(\mathbf{x}_0 - \mathbf{a} \cdot d \cdot \cos(\varphi_0) - \mathbf{b} \cdot d \cdot \sin(\varphi_0) + \mathbf{q}(t)\right)$$

W przypadku rozważanego czwórnika:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{L_1}(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

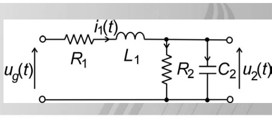
Przykład symulacji dla czwórnika RLC (Matlab)



$$L_1 = 15mH$$
$$C_2 = 10uF$$
$$R_1 = 1k\Omega$$
$$R_2 = 2k\Omega$$

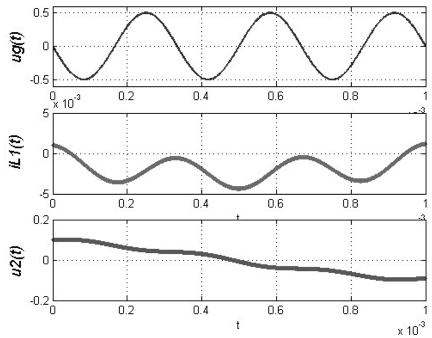
$$f_{rez} = \frac{1}{\sqrt{(2 \cdot \pi)^2 \cdot L_1 \cdot C_2}} \cong 410{,}94Hz$$

Przykład symulacji dla czwórnika RLC (Matlab)



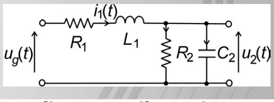
$$u_g(t) = d \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \varphi_0) \cdot \mathbf{1}(t)$$

$$d = 0.5$$
$$f_0 = 3kHz$$
$$\varphi_0 = \pi / 2$$

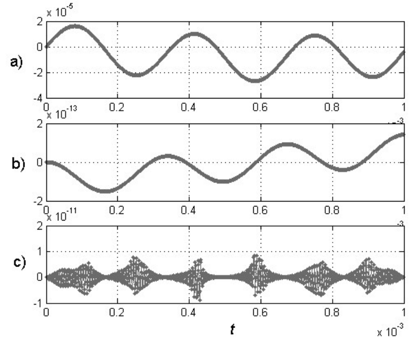


AGH

Przykład symulacji dla czwórnika RLC (Matlab)

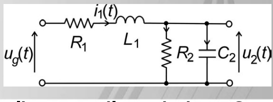


Porównanie trzech rozwiązań numerycznych z analitycznym dla prądu w *L*: a) metoda Eulera; b) metoda Rungego-Kutty(4) „ręcznie"; c) za pomocą funkcji ode 45



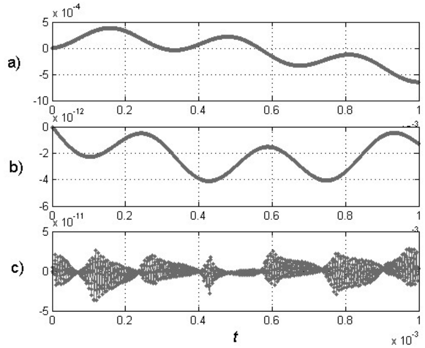
AGH

Przykład symulacji dla czwórnika RLC (Matlab)



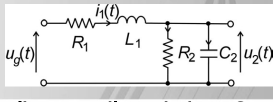
Porównanie trzech rozwiązań numerycznych z analitycznym dla napięcia na *C*: a) metoda Eulera; b) metoda Rungego-Kutty(4) „ręcznie"; c) za pomocą funkcji ode 45

Tolerancja błędu względnego: RelTol=10^(-12)



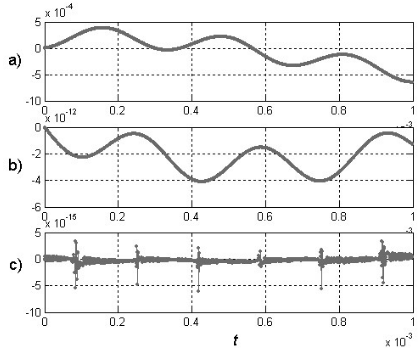
AGH

Przykład symulacji dla czwórnika RLC (Matlab)



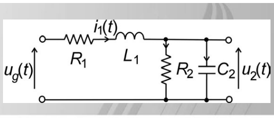
Porównanie trzech rozwiązań numerycznych z analitycznym dla napięcia na *C*: a) metoda Eulera; b) metoda Rungego-Kutty(4) „ręcznie"; c) za pomocą funkcji ode 45

Tolerancja błędu względnego: RelTol=10^(-14)

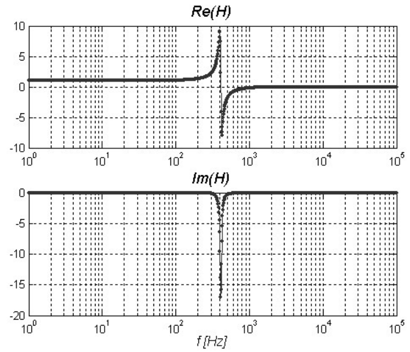


AGH

Przykład symulacji dla czwórnika RLC (Matlab)

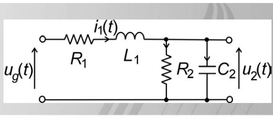


Charakterystyki częstotliwościowe (Fourier) - część rzeczywista i urojona

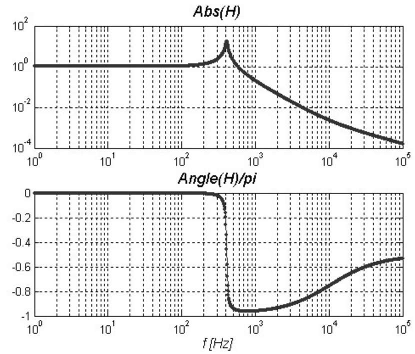


AGH

Przykład symulacji dla czwórnika RLC (Matlab)

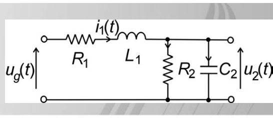


Charakterystyki częstotliwościowe (Fourier) - amplituda i faza

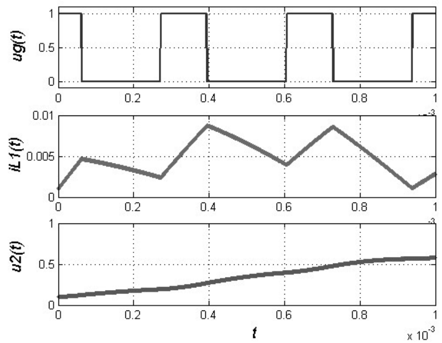


AGH

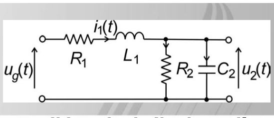
Przykład symulacji dla czwórnika RLC (Matlab)



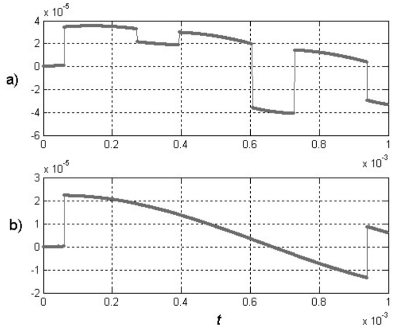
Stany nieustalone (*ang. transient*)



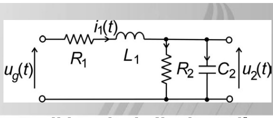
Przykład symulacji dla czwórnika RLC (Matlab)



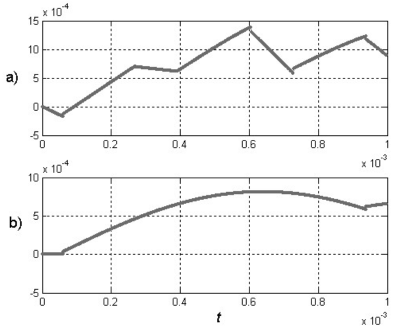
Porównanie dwóch rozwiązań numerycznych z wynikiem funkcji ode45 dla prądu w *L*: a) metoda Eulera; b) metoda Rungego-Kutty (4 rzędu) „ręcznie"



Przykład symulacji dla czwórnika RLC (Matlab)



Porównanie dwóch rozwiązań numerycznych z wynikiem funkcji ode45 dla napięcia na C: a) metoda Eulera; b) metoda Rungego-Kutty (4.) „ręcznie"



Zapraszam do laboratorium ...